TRIPLE L-FUNCTIONのGAMMA FACTORについて(HOLOMORPHIC CASE)(保型形式とゼータ関数の研究)

池田, 保

池田, 保. TRIPLE L-FUNCTIONのGAMMA FACTORについて(HOLOMORPHIC CASE)(保型形式とゼータ関数の研究). 数理解析研究所講究録 1997, 1002: 151-159

数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 151-159

TRIPLE L-FUNCTION の GAMMA FACTOR について (HOLOMORPHIC CASE)

池田 保 (京都大学大学院理学研究科)

§1. Triple L-function の積分表示

Triple L-function の理論の復習からはじめることにする。Real place 上の問題を考えているので基礎体は $\mathbb{Q}$ として考えて一般性を失わない。$\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ の adele ring とする。ψ を $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ の additive character で、$\psi_\infty(x)=\exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ となるよう正規化する。π_i, $(i=1,2,3)$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約な cuspidal automorphic representation で cusp form φ_i で生成されているものとする。以下では記号的に $\Pi=\pi_1\times\pi_2\times\pi_2$ とかくことにする。π_i の central character を ω_i とし、$\omega=\omega_1\omega_2\omega_3$ とする。Bad prime の集合 S は level を割る有限素点と無限遠素点をすべて含んでいるとする。

$p\notin S$ に対して、$\pi_{i,p}$ の Satake parameter を

$$A_{i,p}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})={}^L\mathrm{GL}_2$$

とする。Triple L-function の素点 p における local factor を

$$\begin{aligned}L_p(s,\Pi)=&L_p(s,\pi_{1,p}\times\pi_{2,p}\times\pi_{3,p})\\=&\det(\mathbf{1}_8-A_{1,p}\otimes A_{2,p}\otimes A_{3,p}\cdot p^{-s})^{-1}\end{aligned}$$

で定義する。

代数群 H, P, M, G を

$$H=\mathrm{GSp}_3=\left\{g\in\mathrm{GL}_6\,\middle|\,g\begin{pmatrix}\mathbf{0}_3&-\mathbf{1}_3\\\mathbf{1}_3&\mathbf{0}_3\end{pmatrix}{}^tg=m(g)\begin{pmatrix}\mathbf{0}_3&-\mathbf{1}_3\\\mathbf{1}_3&\mathbf{0}_3\end{pmatrix},m(g)\in\mathrm{GL}_1\right\},$$

$$P=\left\{\left(\begin{array}{c|c}mA&*\\\hline\mathbf{0}_3&{}^tA^{-1}\end{array}\right)\in H,m\in\mathrm{GL}_1,A\in\mathrm{GL}_3\right\},$$

$$M=\left\{\left(\begin{array}{c|c}mA&\mathbf{0}_3\\\hline\mathbf{0}_3&{}^tA^{-1}\end{array}\right)\in H,m\in\mathrm{GL}_1,A\in\mathrm{GL}_3\right\},$$

$$G=\left\{g=(g^{(1)},g^{(2)},g^{(3)})\in{\mathrm{GL}_2}^3\,\middle|\,\det g^{(1)}=\det g^{(2)}=\det g^{(3)}\right\}.$$

と定義する。 G の H への diagonal embedding を ι であらわす。K を $H(\mathbb{A})$ の standard maximal compact subgroup とする。 $s \in \mathbb{C}$ に対して誘導表現の空間 $I(\omega, s)$ を

$$I(\omega,s) = \left\{ f : H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \,\middle|\, f(ph) = \omega(m \det A)|m|^{3s+\frac{3}{2}} |\det A|^{2s+1} f(h), \right.$$
$$\left. p = \left(\begin{array}{c|c} mA & * \\ \hline \mathbf{0}_3 & {}^tA^{-1} \end{array} \right) \in P(\mathbb{A}), h \in H(\mathbb{A}) \right\}$$

と定義する。$f^{(s)}(h)$ を $\mathbb{C} \times H(\mathbb{A})$ 上の関数で、 $s \in \mathbb{C}$ を fix した時には $f^{(s)} \in I(\omega, s)$ であって、 $f^{(s)}$ の K への制限は s に depend しないものとする。このような $f^{(s)}$ に対して、Eisenstein series $E(h; f^{(s)})$ を

$$E(h; f^{(s)}) = \sum_{\gamma \in P \backslash H} f^{(s)}(\gamma h)$$

と定義する。 $E(h; f^{(s)})$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ の時絶対収束し、 全 s 平面に解析接続される。

$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3$ を $G(\mathbb{A})$ 上の関数とみる。この時次のような積分を考える。

$$\int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); f^{(s)}) \varphi(g)\, dg$$

ここで、 $Z \simeq \mathrm{GL}_1$ は G の center の連結成分とする。φ_i の Fourier 係数として得られる Whittaker 関数を W_i とする。 すなわち、

$$W_i(g) = \int_{\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}} \varphi_i \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \psi(-x)\, dx.$$

さらに、 $f^{(s)}, W_i$ は decomposable であるとする :

$$f^{(s)} = \prod_v f_v^{(s)}, \quad W_i = \prod_v W_{i,v}.$$

φ と同様に $W = W_1 \times W_2 \times W_3$ とおくことにする。 この時、 上の積分は local integral の積に分解する :

$$\int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); f^{(s)}) \varphi(g)\, dg = \prod_v \int_{R_{0,v} \backslash G_v} f_v^{(s)}(\eta_0 \iota(g)) W_v(g)\, dg$$

ここで

$$\eta_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & n_1 \\ 0 & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & n_2 \\ 0 & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & n_3 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in \mathrm{GL}_1, n_1 + n_2 + n_3 = 0 \right\},$$

とする。 $v \notin S$ ならば measure を適当に正規化すれば、

$$\int_{R_{0,v} \backslash G_v} f_v^{(s)}(\eta_0 \iota(g)) W_v(g)\, dg = L_v(2s+1, \omega)^{-1} L_v(4s, \omega^2)^{-1} L_v(s, \Pi)$$

が成り立つ。

$$w = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & -1 \\ & & & & -1 & \\ & & & -1 & & \\ \hline & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array} \right)$$

とし、 intertwining operator $M_w : I(\omega, s) \to I(\omega^{-1}, 1-s)$ を

$$M_w f(h) = \omega(m(h)) \int_N f(w^{-1} nh)\, dn$$

と定義する。 (関数等式を対称的な形に書くために、通常の定義を $\omega(m(h))$ で twist したものを採用している。) ただし、

$$N = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1_3 & x \\ \hline 0_3 & 1_3 \end{array} \right) \middle| \, x \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{Q}) \right\}$$

は P の unipotent radical である。 M_w は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ の時、絶対収束し、 全 s 平面に解析接続できる。Eisenstein series の関数等式より、

$$\int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); f^{(s)}) \varphi(g)\, dg = \int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); M_w f^{(s)}) \tilde{\varphi}(g)\, dg$$

が成り立つことに注意する。 ただし、 $\tilde{\varphi}_i(g) = \omega_i(\det g)^{-1} \varphi_i(g) \in \tilde{\pi}_i$ で $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \times \tilde{\varphi}_2 \times \tilde{\varphi}_3$ とする。

§2. Local theory の復習

Bad prime $v \in S$ に対しても local factor $L_v(s, \Pi)$ および epsilon factor $\varepsilon(s, \Pi, \psi)$ を定義することがこの節の目標である。この節では代数群は $\mathbb{Q}_v$ 上定義されたものとし、 $I(\omega, s)$ M_w などは局所体上の類似物とする。これらは次の (1) から (4) の条件をみたすことが望ましい。

(1) $v = p$ が finite なら、 $L_v(s, \Pi)^{-1}$ は定数項が 1 の p^{-s} の多項式である。
(2) $\varepsilon(s, \Pi, \psi)$ は cq^s, $c, q \in \mathbb{C}$ の形の関数である。
(3) v が infinite なら、 $L_v(s, \Pi)$ は s の exponential function と gamma function の積である。
(4) 適当な local functional equation が成り立つ。

Normalized intertwining operator M_w^* を

$$M_w^* = \varepsilon'(2s-2,\omega,\psi)\varepsilon'(4s-3,\omega^2,\psi)\cdot M_w$$

と定義する。ただし、

$$\varepsilon'(s,\omega,\psi) = \varepsilon(s,\omega,\psi)\frac{L(1-s,\omega^{-1})}{L(s,\omega)}.$$

$H\times\mathbb{C}$ 上の関数 $f^{(s)}(h)$ が $I(\omega,s)$ の good section であるとは次の条件がみたされることであるとする。

(1) $h\in H$ を fix した時、$f^{(s)}$ は s の meromorphic function. v が finite の時には、さらに、$\mathbb{C}[q^s,q^{-s}]$ の元であるとする。
(2) $s\in\mathbb{C}$ を fix した時、$f^{(s)}\in I(\omega,s)$.
(3) $f^{(s)}(h)$ は right K-finite.
(4) $L(2s+1,\omega)^{-1}L(4s,\omega^2)^{-1}f^{(s)}$ は s に関して holomorphic.
(5) $L(3-2s,\omega^{-1})^{-1}L(4-4s,\omega^{-2})^{-1}M_wf^{(s)}$ は s に関して holomorphic.

この時、$f^{(s)}$ が $I(\omega,s)$ の good section であることと、$M_w^*(f^{(s)})$ が $I(\omega^{-1},1-s)$ の good section であることとは同値であることが証明できる。また、前節で考えたような、K 上への制限が s に depend しないような $f^{(s)}$ は good section であることが証明できる。さらに、ω が不分岐で ψ が order 0 の時、$f_0^{(s)}$ を K への制限が $L(2s+1,\omega)L(4s,\omega^2)$ であるような K-fixed vector とすれば、$f_0^{(s)}$ は good section であり、$M_w^*f^{(s)} = f^{(1-s)}$ である。さらに

$$\Psi(f^{(s)},W) = \int_{\mathbb{Q}_v^\times N_0\backslash G} f^{(s)}(\eta_0\iota(g))W(g)\,dg$$

とかくことにすれば、$\Psi(f^{(s)},W)$ は Re $\gg 0$ の時絶対収束し、$v\notin S$ のとき、$\Psi(f_0^{(s)},W_0) = \det(1_8-A_1\otimes A_2\otimes A_3\cdot q^{-s})^{-1}$ である。ここで、W_0 は Π に属する標準的な class 1 Whittaker function である。

さて、次の (1) から (3) を満たすような零点を持たない meromorphic function $l(s,\Pi)$ が存在することが証明できる。さらに、k が non-archimedean なら、$l(s,\Pi)^{-1}\in\mathbb{C}[q^{-s}]$ で、定数項は 1 であるようにとれる。

(1) $I(\omega,s)$ の任意の good section $f^{(s)}$ および Π の任意の Whittaker function W にたいして、$l(s,\Pi)^{-1}\Psi(f^{(s)},W)$ は holomorphic.
(2) $l'(s)$ が上の性質をもつなら、$l(s,\Pi)l'(s)^{-1}$ は holomorphic.
(3) Π が class 1 なら、$l(s,\Pi) = \det(1_8 - A_1\otimes A_2\otimes A_3\cdot q^{-s})^{-1}$ ととれる。

また、$\tilde{W}_i(g) = \omega_i^{-1}(\det g)W_i(g)$, $\tilde{W} = \tilde{W}_1\times\tilde{W}_2\times\tilde{W}_3$ とおく時、零点を持たない entire function $e(s,\Pi,\psi)$ が存在して、local functional equation

$$\frac{\Psi(M_w^*f^{(s)},\tilde{W})}{l(1-s,\tilde{\Pi})} = e(s,\Pi,\psi)\frac{\Psi(f^{(s)},W)}{l(s,\Pi)}$$

が成り立つ。 $v=p$ が finite なら、 $e(s,\Pi,\psi)=ap^{cs}$, $a\in\mathbb{C}^\times$, $c\in\mathbb{Z}$ である。 このことから、 v が finite なら、 local factor $L(s,\Pi)$ として $l(s,\Pi)$ をとり、 epsilon factor $\varepsilon(s,\Pi,\psi)$ として $e(s,\Pi,\psi)$ ととれば望ましい局所関数等式が成り立つことがわかる。さらにこの場合 π_1,π_2,π_3 のうち、supercuspidal でないものが2つ以上あれば、この L-factor と ε-factor は π_1,π_2,π_3 の Langlands parameter から定まる L-factor と ε-factor に一致することを示すことができる。また、 v が archimedean の場合、 Π の Langlands parameter によって定まる Γ factor と $l(s,\Pi)$ は invertible function を除いて一致することが示される。

§3 Real holomorphic case

前節のような局所理論を応用して triple L-function の特殊値などを研究しようとすると local integral $\Psi(f^{(s)};W)$ が実際に explicit に計算できなければ困る。この節では v が実素点で $\pi_{i,v}$ が holomorphic な cusp form から生成されている場合を考える。以下、 代数群は $\mathbb{R}$ 上定義されているとし、記号から v を省略する。

$\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)\in\mathbb{Z}^3$, $\kappa_1\geq\kappa_2\geq\kappa_3$ とする。

π_i は次の (1) (2) で特徴づけられる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約表現とする。

(1) π_i の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ への制限は $\mathcal{D}^+_{\kappa_i}\oplus\mathcal{D}^-_{\kappa_i}$ と同形。

(2) π_i の central character $\omega_i(x)$ は $|x|^{1-\kappa_i}\mathrm{sgn}(x)^{\kappa_i}$ に等しい。

$\omega(x)=\omega_1(x)\omega_2(x)\omega_3(x)$ とおく。次の 4 つの場合分けを考える。

$$\begin{cases}\kappa_1<\kappa_2+\kappa_3,\ \kappa_2\equiv\kappa_3 \mod 2 & \text{(Case DE "definite even")}\\ \kappa_1\geq\kappa_2+\kappa_3,\ \kappa_2\equiv\kappa_3 \mod 2 & \text{(Case IE "indefinite even")}\\ \kappa_1<\kappa_2+\kappa_3,\ \kappa_2\equiv\kappa_3+1 \mod 2 & \text{(Case DO "definite odd")}\\ \kappa_1\geq\kappa_2+\kappa_3,\ \kappa_2\equiv\kappa_3+1 \mod 2 & \text{(Case IO "indefinite odd")}\end{cases}$$

Π の Langlands parameter から定まる L-factor $L(s,\pi_1\times\pi_2\times\pi_3)$ とε-factor $\varepsilon(s,\pi_1\times\pi_2\times\pi_3,\psi)$ は次のように与えられる。

$$L(s,\Pi)=\begin{cases}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa_1+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa_2+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa_3+1) & \text{(Case D)}\\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa_2-\kappa_3+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa_2+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa_3+1) & \text{(Case I)}\end{cases}$$

$$\varepsilon(s,\Pi,\psi)=\begin{cases}(-1)^{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+1} & \text{(Case D)}\\ 1 & \text{(Case I)}\end{cases}$$

ここで $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$.

$g\in H(\mathbb{R})$ の岩沢分解を

$$g=\begin{pmatrix}mA & *\\ \mathbf{0}_3 & {}^tA^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U & V\\ -V & U\end{pmatrix},\qquad m\in\mathbb{R}^\times,\ A\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix}U & V\\ -V & U\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_3(\mathbb{R})\cap SO(6)$$

とする。

ϕ が $O(3)\backslash U(3)$ 上の ω-semi-spherical function であるとは ϕ が $U(3)$ の右作用で finite で $O(3)$ の左作用で $\omega\cdot\det$ に関して covariant であることとする。ϕ をこのようなものとするとき、 $H(\mathbb{R})$ 上の関数 $f^{(s)}_\phi$ を

$$f^{(s)}_\phi(g)=\omega(m\det A)|m^3\det A^2|^{s+(1/2)}\overline{\phi(u)}$$

で定義する。ここで $u = U + \sqrt{-1}V \in U(3)$ とする。

$H \times \mathbb{C}$ 上の関数 $F^{(s)}$ が normalized section であるとは次の (1), (2) を満たすこととする。

(1) $s \in \mathbb{C}$ を fix したとき、 $F^{(s)} \in I(\omega, s)$.

(2) $F^{(s)}$ は $L(2s+1,\omega)L(4s,\omega^2)P(s)f_\phi^{(s)}$, $P(s) \in \mathbb{C}(s)$ という形の関数の有限和でかける。

定理： $F^{(s)}$ が $I(\omega, s)$ の normalized section であるためには $M_w^* F^{(s)}$ が $I(\omega^{-1}, 1-s)$ の normalized section であることが必要十分である。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_3 \bmod 2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned} d_\lambda(s) =& 2^{2s-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3+3}\Gamma_{\mathbb{R}}(2s-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3+3+|\lambda_1+1|) \\ & \times \Gamma_{\mathbb{R}}(2s-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3+3+|\lambda_2|)\Gamma_{\mathbb{R}}(2s-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3+3+|\lambda_3-1|). \end{aligned}$$

と定義する。ここで $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$. $d_\lambda(s)$ は右半平面 $\mathrm{Re} \geq (\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3-2)/2$ （関数等式の中心の右側）において零点も極も持たないことに注意する。

ϕ が $U(3)$-type τ_λ をもつとする。ここで τ_λ は Young diagram λ で定まる $U(3)$ の既約表現である。

このとき、normalized intertwining operator M_w^* の作用は

$$M_w^*(d_\lambda(s)f_\phi^{(s)}) = \varepsilon(\lambda)d_\lambda(1-s)f_\phi^{(1-s)}$$

で与えられる。ここで

$$\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \equiv 1 \bmod 2 \text{ または } \lambda_1\lambda_3 \leq 0 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。このことから、 normalized good section の全体はこのような形のもので $\mathbb{C}[s]$ 上生成されることがわかる。

定理： $F^{(s)}$ が $I(\omega, s)$ の normalized good section で、Π に属する Whittaker function W は G の compact subgroup $SO(2)^3$ の作用で finite であるとする。このとき、局所関数等式

$$\frac{\Psi(M_w^* F^{(s)}, \tilde{W})}{L(1-s,\tilde{\Pi})} = \varepsilon(s,\Pi,\psi)\frac{\Psi(f^{(s)},W)}{L(s,\Pi)}$$

が成り立つ。この両辺は s の多項式である。

以下では$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ を次のように与える。

$$\lambda = \begin{cases} (\kappa_1, \kappa_1, \kappa_2+\kappa_3-\kappa_1) & \text{(Case E)}, \\ (\kappa_1+1, \kappa_1-1, \kappa_2+\kappa_3-\kappa_1) & \text{(Case O)} \end{cases}$$

$$\mu = \kappa_1 - \kappa_2, \quad \nu = \begin{cases} (\kappa_2-\kappa_3)/2 & \text{(Case E)} \\ (\kappa_2-\kappa_3-1)/2 & \text{(Case O)}. \end{cases}$$

$u \in SO(6) \cap \mathrm{Sp}_3(\mathbb{R}) \simeq U(3)$ 上の ω-semi-spherical function $H_{\lambda|\kappa}$ を Case E の場合には

$$(\det u)^{\kappa_1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i}\, \mu!\, (\mu+\nu)!}{i!\, (\mu-2i)!\, (\nu+i)!} \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i} \bar{H}_{22}^{i}$$

Case O の場合には

$$\begin{aligned}
&(\det u)^{\kappa_1-1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i+1}\, \mu!\, (\mu+\nu)!}{i!\, (\mu-2i)!\, (\nu+i)!} H_{12}\, \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i} \bar{H}_{22}^{i} \\
&+ (\det u)^{\kappa_1-1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i}\, \mu!\, (\mu+\nu)!}{i!\, (\mu-2i-1)!\, (\nu+i)!} H_{11}\, \bar{H}_{13}\, \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i-1} \bar{H}_{22}^{i} \\
&+ (\det u)^{\kappa_1-1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i+1}\, \mu!\, (\mu+\nu)!}{(i-1)!\, (\mu-2i)!\, (\nu+i)!} H_{11}\, \bar{H}_{12}\, \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i} \bar{H}_{22}^{i-1}
\end{aligned}$$

と定義する。ここで $u \in U(3)$ に対して H_{ij} は ${}^t\bar{u}u$ の ij 成分、$\bar{H}_{ij}$ は H_{ij} の複素共役とする。$H_{\lambda|\kappa}$ の $U(3)$-type は τ_λ で weight は κ である。$\phi = H_{\lambda|\kappa}$ のときは $f_\phi^{(s)}$ を $f_{\lambda|\kappa}^{(s)}$ と省略してかくことにする。

λ が上のように与えられている場合には $d_\lambda(s)$ は次のようになる。

$$2^{1-\kappa_1}\pi^{-3s+\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3-4}\Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+3)\Gamma(s-\kappa_1+1) \qquad \text{(Case DE)}$$

$$2^{1-\kappa_1}\pi^{-3s+2\kappa_2+2\kappa_3-5}\Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+3)\Gamma(s-\kappa_2-\kappa_3+2) \qquad \text{(Case IE)}$$

$$2^{2-\kappa_1}\pi^{-3s+\kappa_2+\kappa_3-4}(2s-\kappa_2-\kappa_3+3)\Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+2)\Gamma(s-\kappa_1+1) \qquad \text{(Case DO)}$$

$$2^{2-\kappa_1}\pi^{-3s+2\kappa_2+2\kappa_3-5}(2s-\kappa_2-\kappa_3+3)\Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+2)\Gamma(s-\kappa_2-\kappa_3+2) \qquad \text{(Case IO)}$$

π_i の weight κ_i の Whittaker 関数を W_i とする。

$$W_i \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2e^{-2\pi a}\, a^{\kappa_i/2} & a > 0, \\ 0 & a < 0. \end{cases}$$

$$W(g_1, g_2, g_3) = W_1(g_1)W_2(g_2)W_3(g_3).$$

定理： Triple L-function の局所積分 $d_\lambda(s)\Psi(f_{\lambda|\kappa}^{(s)}, W)$ は次のようになる。

$$\begin{cases}
2^{2-\kappa_1}(\sqrt{-1})^{\kappa_1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)!}{(\kappa_1-\kappa_3)!} L(s,\Pi) & \text{(Case DE)} \\
2^{3-\kappa_2-\kappa_3}(\sqrt{-1})^{\kappa_1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)!}{(\kappa_1-\kappa_3)!} L(s,\Pi) & \text{(Case IE)} \\
2^{4-\kappa_1}(\sqrt{-1})^{\kappa_1+1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3-1)!}{(\kappa_1-\kappa_3-1)!} L(s,\Pi) & \text{(Case DO)} \\
2^{5-\kappa_2-\kappa_3}(\sqrt{-1})^{\kappa_1+1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3-1)!}{(\kappa_1-\kappa_3-1)!} L(s,\Pi) & \text{(Case IO)}
\end{cases}$$

この定理の証明には次の補題が用いられる。

Lemma.

$$I(\alpha,\beta;l_1,l_2,l_3)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty(x+y+z+\sqrt{-1}n)^{-s-\alpha}(x+y+z-\sqrt{-1}n)^{-s-\beta}$$
$$\times e^{-2\pi(x+y+z-\sqrt{-1}n)}x^{s+l_1}y^{s+l_2}z^{s+l_3}\,dn\,d^\times x\,d^\times y\,d^\times z.$$

とおけば、 $I(\alpha,\beta;l_1,l_2,l_3)$ は

$$2^{-4s-2l_1-2l_2-2l_3+\alpha+\beta}\pi^{-s-l_1-l_2-l_3+\alpha+\beta}\Gamma(s+\alpha)^{-1}\Gamma(2s+l_1+l_2+l_3-\alpha+1)^{-1}$$
$$\times\Gamma(s+l_1)\Gamma(s+l_2)\Gamma(s+l_3)\Gamma(s+l_1+l_2+l_3-\alpha-\beta+1).$$

に等しい。

Lemma.

$$\sum_{j=0}^{M}\sum_{l=0}^{N}(-1)^{j+l}\binom{M}{j}\binom{N}{l}\frac{\Gamma(A+j)\Gamma(B+l)}{\Gamma(A+B+j+l)}=\frac{\Gamma(A+N)\Gamma(B+M)}{\Gamma(A+B+N+M)}.$$

References

REFERENCES

1. D. Blasius, *Critical values of certain tensor product L-functions*, Inv. Math. **90** (1987), 181–188.
2. S. Böcherer, R. Schulze-Pillot, *On the central critical value of the triple product L-function*, preprint (1995).
3. P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math. **33-2** (1979), 313–346.
4. P. Garrett, *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products*, Annals of Math. **125** (1987), 209–235.
5. P. B. Garrett, M. Harris, *Special values of triple product L-functions*, Amer. J. Math. **115** (1993), 161–240.
6. A. Guillemonat, *On some semi-spherical representations of an Hermitian symmetric pair of the tubular type*, Math. Ann. **246** (1980), 93–116.
7. M. Harris, *Period invariants of Hilbert modular forms. I. Trilinear differential operators and L-functions*, Cohomology of arithmetic groups and automorphic forms, Lecture Notes in Math., vol. 1447, Springer, Berlin, 1990, pp. 155–202.
8. M. Harris, *Period invariants of Hilbert modular forms. II*, Comp. Math. **94** (1994), 201–226.
9. M. Harris, S. Kudla, *The central critical value of a triple product L-function*, Ann. of Math. **133** (1991), 605–672.
10. M. Harris, J. Tilouine, *p-adic measures and square roots of triple product L-functions*, preprint (1996).
11. T. Ikeda, *On the functional equations of the triple L-functions*, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989), 175–219.
12. T. Ikeda, *On the location of poles of the triple L-functions*, Comp. Math. **83** (1992), 187–237.
13. T. Ikeda, *On the gamma factors of the triple L-functions*, to appear.
14. S. Kudla, S. Rallis, *Degenerate principal series and invariant distributions*, Israel J. Math. **69** (1990), 25–45.
15. S. Mizumoto, *Integrality of critical values of triple product L-functions*, Analytic number theory , Lecture Notes in Math. **1434**, Springer, Berlin,, 1990, pp. 188–195.
16. T. Orloff, *Special values and mixed weight triple products*, Inv. Math. **90** (1987), 169–188.

17. I. Piatetski-Shapiro, S. Rallis, *Rankin triple L functions*, Comp. Math. **64** (1987), 31–115.
18. D. Prasad, *Trilinear forms for $GL(2)$ and local epsilon factors*, Comp. Math. **75** (1990), 1–46.
19. T. Satoh, *On triple L-functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **62** (1986), 396–398.
20. T. Satoh, *Some remarks on triple L-functions*, Math. Ann. **276** (1987), 687–698.
21. T. Satoh, *Vector valued modular forms of degree two and their application to triple L-functions*, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties, Adv. Stud. Pure Math. **15**, Academic Press, 1989, pp. 89–97.